

1 Les nombres entiers

- ✓ Les **nombres entiers naturels** sont ceux qui servent à compter : 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 2019 ; ...
Les entiers naturels appartiennent à un ensemble de nombres noté $\mathbb{N}$.
- ✓ les **nombres entiers relatifs** qui sont les entiers naturels et leurs opposés : -18 ; -7 ; +9 ; ...
Les entiers relatifs appartiennent à un ensemble de nombres noté $\mathbb{Z}$.

2 Multiples, diviseurs et nombres premiers

2.1 Multiples et diviseurs

Définitions : multiples et diviseurs

Soit a et b deux nombres entiers. a est un diviseur de b lorsqu'il existe k entier, tel que $b = k \times a$.

- On peut dire que b est un multiple de a .
- On peut dire que a divise b .
- On peut dire que b est un multiple de a .

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si b et b' sont deux multiples de a alors $b + b'$ est un multiple de a .

Exemples : $21 = 3 \times 7$. Donc 3 et 7 sont des diviseurs de 21, et 21 est un multiple de 3 et est aussi un multiple de 7.

$21 = 3 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$.

21 et 15 sont des multiples de 3. $21 + 15 = 36$, donc 36 est un multiple de 3.

En effet : $36 = 21 + 15 = 3 \times 7 + 3 \times 5 = 3 \times (7 + 5) = 3 \times 12$.

Propriété : nombres pairs et impairs

Soit $n \in \mathbb{Z}$. n est un nombre :

- **pair** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2 \times p$, soit $n = 2p$.
- **impair** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2 \times p + 1$, soit $n = 2p + 1$.

Propriété : carré d'un nombre impair

Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'entier relatif n^2 est impair, si et seulement si n est impair.

Démonstration : Soit n un nombre impair. Il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

$$n^2 = (2p + 1)^2 = (2p + 1) \times (2p + 1) = 4p^2 + 2p + 2p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

On pose $P = 2p^2 + 2p$ qui est un entier car p l'est.

$$n^2 = 2P + 1$$

Comme il existe un entier P tel que $n^2 = 2P + 1$, n^2 est aussi un nombre impair.

2.2 Nombres premiers

Définition : nombre premier

Un entier naturel non nul est dit **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Les dix premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 .

Propriété : diviseur premier d'un entier

Soit n un nombre entier naturel qui n'est pas premier.

Son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier plus petit ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple : $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

Le plus petit diviseur est 2 qui est premier.

Chacun des diviseurs de 90 est plus petit que $\sqrt{90}$, ($\sqrt{90} \approx 9.4$).

Théorème :

Quel que soit l'entier naturel n supérieur ou égal à 2, si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Propriété : décomposition d'un nombre premier

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Méthode et exercices 1 et 2 page 50

Propriété : fraction irréductible

Une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur n'admettent qu'un seul diviseur en commun : 1.

Remarque : on dit que ces deux nombres sont premiers entre eux.

Méthode et exercice 3 page 50

3 Puissances entières d'un nombre relatif

3.1 Notations a^n et a^{-n}

Définition : puissance d'un nombre

Si a est un nombre et n un entier naturel non nul, on appelle puissance n -ième de a , le nombre $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

On pose, pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

Par convention, on pose $a^0 = 1$, pour tout nombre a non nul.

a^{-n} (lu "a puissance n") est appelé **puissance n-ième** de a et n est appelé l'**exposant**.

Remarque : En particulier, $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$

3.2 Calculs avec les puissances

Règles : calculs avec les puissances

Si a et b sont des nombres et n et m des entiers relatifs, alors

$$\bullet a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\bullet a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\bullet \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\bullet \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\bullet (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Remarque : Attention, il n'y a pas de règle avec les sommes de puissances.

Exemples : $3^2 = 9$; $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9; \quad -3^2 = -3 \times 3 = -9$$

$$3^4 \times 3^5 = \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{4 \text{ termes}} \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{5 \text{ termes}} = \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{9 \text{ termes}} = 3^9$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5^2}{2^2}; \quad (-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -3^3 = -27$$

$$4^5 \times 4^{-2} = 4^5 \times \frac{1}{4^2} = \frac{4 \times \dots \times 4}{4 \times 4} = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

$$2^3 \times 2^2 = 2^5; \quad 5^7 \times 5^{-4} = 5^3; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Méthode et exercices 4 à 10 pages 51 et 52

4 Racine carrée

4.1 Définitions

Définition : racine carrée

La racine carrée d'un nombre réel positif a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a :
Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre réel tel que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Définition : carré parfait

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Remarque :

Le carré d'un nombre est toujours positif.

Lorsque a est nombre strictement négatif, $\sqrt{a}$ n'existe pas et n'a donc pas de sens.

4.2 Calculs avec les racines carrées

Règles : calculs avec les racines carrées

Soit a et b deux nombres positifs, alors :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Si a et b sont strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$

Remarque :

Attention, il n'y a pas de règle avec les sommes de racines carrées : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exemples :

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$; $\sqrt{121} = 11$ car $11^2 = 121$;

Pour $x \geq 0$, $\sqrt{4x^2} = 2x$ car $(2x)^2 = (2x) \times (2x) = 4x^2$

$\sqrt{2} = \dots \sqrt{2}$ qui est le nombre réel tel que $\sqrt{2}^2 = 2$

- $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$
- $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$.
- $\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}\sqrt{8} = 2 + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$
- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$

Méthode et exercices 11 à 14 page 53

Nota Bene :

- La somme est l'opération qui traite de l'addition comme de la soustraction.

En effet, soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : $2 - 5 = (+2) + (-5)$ où $2 - 5$ est bien une somme.

- le produit est l'opération qui traite de la multiplication comme de la division.

En effet, diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse : $9 \div 5 = \frac{9}{5} = 9 \times \frac{1}{5}$ où $9 \div 5$ est bien un produit.

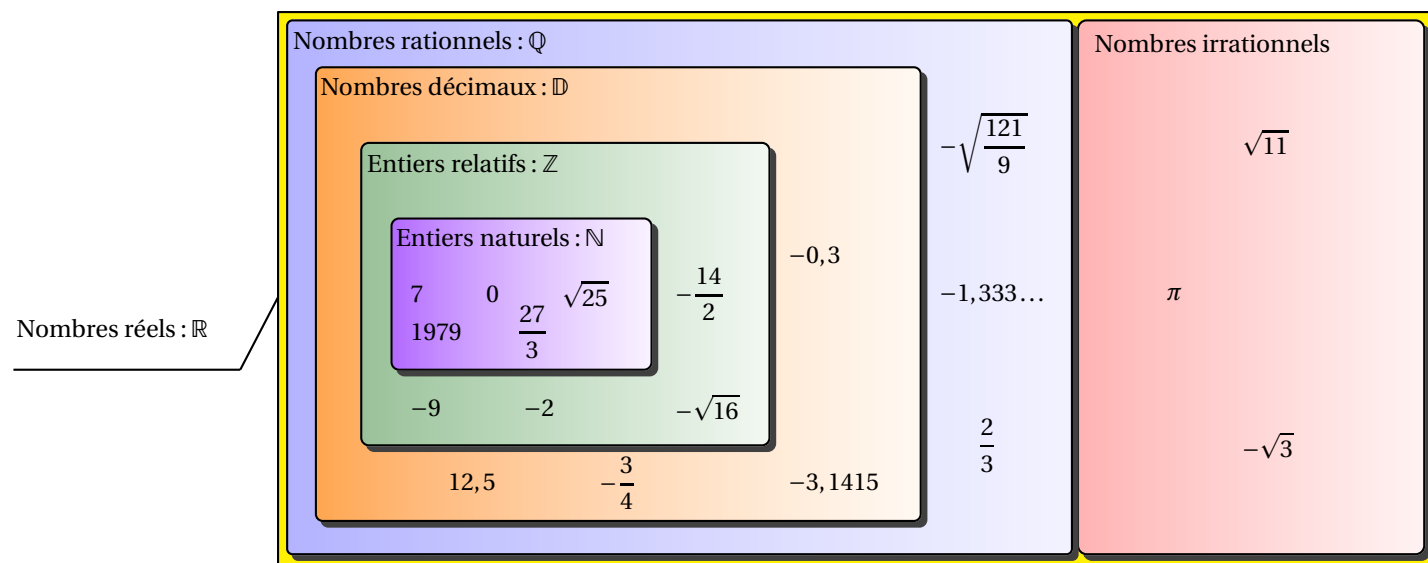
5 Ensemble de nombres

5.1 Définitions

Définitions : ensemble de nombres

- ✓ Les **nombres entiers naturels** sont ceux, positifs, qui servent à compter : 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 2019 ; ...
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
- ✓ les **nombres entiers relatifs** qui sont les entiers naturels et leurs opposés (négatifs) : -18 ; -7 ; +9 ; ...
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.
- ✓ Les **nombres décimaux** sont les nombres s'écrivant comme le quotient d'un entier par un nombre de la forme $2^n \times 5^p$.
Autrement dit, ce sont ceux qui n'ont pas une infinité de chiffres après la virgule : -7,2 ; 0,692 ; -11 ; ... ; 3,38 ; ...
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
- ✓ Les **nombres rationnels** sont les nombres s'écrivant sous la forme d'un quotient quelconque (un entier relatif par un entier naturel non nul). Autrement dit, ce sont les fractions : $\frac{7}{3}$; $-\frac{13}{9}$; $5 = \frac{5}{1}$; ... ; $-1,25 = -\frac{5}{4}$; ...
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ (penser « $\mathbb{Q}$ comme quotient »).
- ✓ L'ensemble des **nombres réels** est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels (ceux ne pouvant pas s'écrire sous la forme d'une fraction) : π ; $\sqrt{2}$; ...
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$ (ensemble le plus souvent utilisé).

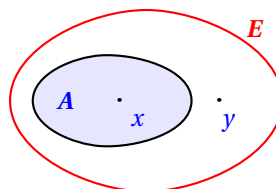
5.2 Une représentation de ces ensembles



5.3 Appartenance et inclusion

Définition :

On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble E , lorsque tous les éléments de A sont aussi des éléments de E .
L'ensemble A est alors appelé **sous-ensemble** ou **partie** de E .



Notation :

Par exemple, dans le schéma ci-dessus, A est **inclus** dans E , on note alors : $A \subset E$.

Par contre, ne pas confondre avec le fait que x **appartient** à A (et donc à E), qui se note : $x \in A$.

Bien entendu, y appartient à E mais **n'appartient pas** à A . On se souvient de la notation : $y \notin A$.

Exemples : L'ensemble $A = \{l ; o ; n ; g\}$ est un sous-ensemble de $E = \{l ; o ; s ; a ; n ; g ; e\}$. On note alors $A \subset E$.
En revanche, $B = \{l ; i ; s ; a\}$ n'est pas un sous-ensemble de E puisque $i \in B$ mais $i \notin E$. On note alors $B \not\subset E$.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ puisque tout entier naturel est un entier relatif. Par contre $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$, donc $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

De même on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Finalement, sur les principaux ensembles de nombres on retiendra que :

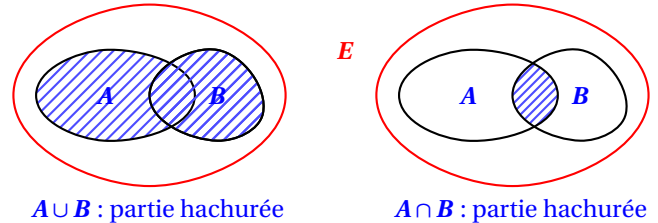
Propriété (admise) : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

5.4 Réunion d'ensembles, intersection d'ensembles

Définitions :

On note A et B deux parties d'un ensemble E :

- La réunion des parties A et B est notée $A \cup B$: c'est la partie de E constituée des éléments appartenant à A **ou** à B .
- L'intersection des parties A et B est notée $A \cap B$: c'est la partie de E constituée des éléments appartenant à A **et** à B .

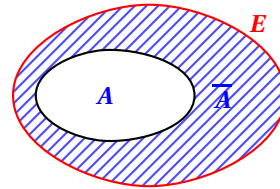


5.5 Complémentaire

Définition :

Soit A un sous-ensemble de E .

L'ensemble des éléments de E qui **n'appartiennent pas** à A est appelé complémentaire de A dans E . Cet ensemble est noté $\bar{A}$.



Exemples : • $A = \{g ; a ; r ; e\}$ est un sous-ensemble de $E = \{p ; y ; t ; h ; a ; g ; o ; r ; e\}$. On a : $\bar{A} = \{p ; y ; t ; h ; o\}$

On remarquera que $A \subset E$, $\bar{A} \subset E$ et que $A \cup \bar{A} = E$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (ensemble vide)

- Soient A et B les ensembles de lettres suivants : $A = \{p ; y ; t ; h ; a ; g ; o ; r ; e\}$ et $B = \{t ; h ; a ; l ; e ; s\}$

On a alors : $A \cup B = \{p ; y ; t ; h ; a ; g ; o ; r ; e ; l ; s\}$

et $A \cap B = \{t ; h ; a ; e\}$

Remarque : si $A = \{d ; e ; u ; x\}$ et $B = \{t ; r ; o ; i ; s\}$ alors $A \cap B$ ne contient aucun élément : on note alors $A \cap B = \emptyset$ (ensemble vide).