Revue d'histoire des sciences

# Mathématiques et logique chez Leibniz / *Mathematics and logic in Leibniz*

M Jacques Bouveresse

**Résumé**

*RÉSUMÉ. — Il est bien connu que Kurt Gödel a entretenu des relations intimes et privilégiées avec l'œuvre de Leibniz et s'est inspiré du projet leibnizien pour développer sa propre conception du rôle de la logique en général, des relations des mathématiques et de la logique et de la place qui doit être reconnue, dans la recherche mathématique elle-même, à la question des fondements et aux questions fondamentales en général. Partant de la façon dont elles ont été interprétées et utilisées par Gödel, l'article s'interroge sur ce qui, pour le logicien d'aujourd'hui, rend si modernes et si actuelles les idées de Leibniz concernant la démonstration et la démontrabilité, la formalisation et la mécanisation du raisonnement mathématique, le problème de la décision, etc., et sur les raisons pour lesquelles il ne semble pas du tout inquiété par l'idée que le formalisme pourrait constituer une menace pour la liberté de l'imagination et de l'invention mathématiques.*

**Abstract**

*SUMMARY. — It is a well-known fact that Gödel kept up a close contact with the work of Leibniz and found in the Leibnizian project inspiration for the development of his own conception concerning the role of logic in general, the relations between mathematics and logic, and the place which should be given, within mathematical research itself, to questions of foundations and to fundamental questions in general. Starting from the manner in which they are interpreted and used by Gödel, this paper reflects on what renders so modern for the contemporary logician Leibniz's ideas concerning proof and provability, the formalization and mechanization of mathematical reasoning, the decision problem, etc. I likewise examine the reasons why he was not deterred by the possibility that formalism might seem to threaten mathematical imagination and invention.*



doi : 10.3406/rhs.2001.2118

http://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_2001_num_54_2_2118

# Mathématiques et logique chez Leibniz

Jacques BOUVERESSE*

RÉSUMÉ. — Il est bien connu que Kurt Gödel a entretenu des relations intimes et privilégiées avec l'œuvre de Leibniz et s'est inspiré du projet leibnizien pour développer sa propre conception du rôle de la logique en général, des relations des mathématiques et de la logique et de la place qui doit être reconnue, dans la recherche mathématique elle-même, à la question des fondements et aux questions fondamentales en général. Partant de la façon dont elles ont été interprétées et utilisées par Gödel, l'article s'interroge sur ce qui, pour le logicien d'aujourd'hui, rend si modernes et si actuelles les idées de Leibniz concernant la démonstration et la démontrabilité, la formalisation et la mécanisation du raisonnement mathématique, le problème de la décision, etc., et sur les raisons pour lesquelles il ne semble pas du tout inquiété par l'idée que le formalisme pourrait constituer une menace pour la liberté de l'imagination et de l'invention mathématiques.

MOTS-CLÉS. — *Mathématiques ; logique ; fondements ; formalisation ; complétude ; décidabilité.*

*SUMMARY. — It is a well-known fact that Gödel kept up a close contact whith the work of Leibniz and found in the Leibnizian project inspiration for the development of his own conception concerning the role of logic in general, the relations between mathematics and logic, and the place which should be given, within mathematical research itself, to questions of foundations and to fundamental questions in general. Starting from the manner in which they are interpreted and used by Gödel, this paper reflects on what renders so modern for the contemporary logician Leibniz's ideas concerning proof and provability, the formalization and mechanization of mathematical reasoning, the decision problem, etc. I likewise examine the reasons why he was not deterred by the possibility that formalism might seem to threaten mathematical imagination and invention.*

*KEYWORDS. — Mathematics ; logic ; foundations ; formalization ; completeness ; decidability.*

(*) Jacques Bouveresse, Collège de France, 11, place Marcelin-Berthelot, 75005 Paris.

### 1 / *La référence leibnizienne chez Gödel*

Dans *Russell's mathematical logic* (1944), Kurt Gödel distingue deux aspects fondamentaux différents de la logique :

« La logique mathématique, qui n'est rien d'autre qu'une formulation précise et complète de la logique formelle, a deux aspects tout à fait différents. D'un côté, elle est une section des mathématiques traitant de classes, relations, combinaisons de symboles, etc., au lieu de nombres, fonctions, figures géométriques, etc. De l'autre, c'est une science, antérieure à toutes les autres, qui contient les idées et les principes sous-jacents à toutes les sciences. C'est dans ce deuxième sens qu'elle a été conçue en premier lieu par Leibniz dans sa *Characteristica universalis*, dont elle aurait formé une partie centrale. Mais il a fallu presque deux siècles après la mort de Leibniz pour que cette idée d'un calcul logique réellement suffisant pour le genre de raisonnement qui apparaît dans les sciences exactes soit mise en œuvre (tout au moins sous une certaine forme, sinon sous la forme que Leibniz avait en tête) par Frege et Peano (1). »

Leibniz a, bien entendu, apporté une contribution tout à fait déterminante au premier aspect. Et il est même le premier à avoir reconnu tout à fait clairement que l'on peut proprement calculer sur bien autre chose que des nombres et qu'il peut par conséquent y avoir une mathématique non seulement des nombres, mais également des concepts, des propositions, des classes et de bien d'autres choses. Mais, même si l'essentiel de la recherche en logique mathématique est consacré aujourd'hui à cet aspect-là, l'intérêt de Gödel, spécialement dans l'essai que j'ai cité, porte en fait principalement sur le deuxième. Partant de Leibniz, il en arrive, en passant par Gotllob Frege et Giuseppe Peano, assez rapidement à Bertrand Russell et il met alors entre parenthèses presque toutes les considérations de détail qui ont trait « au formalisme ou au contenu mathématique » des *Principia mathematica* pour se concentrer essentiellement sur « le travail de Russell concernant l'analyse des concepts et des axiomes sous-jacents à la logique mathématique » (ce qui, comme le remarque Hao Wang, aurait probablement été un titre plus exact pour son essai). La façon dont il procède dans cet essai donne certainement une idée exacte de ce qu'il considère comme central dans la logique mathématique, telle qu'il la conçoit,

(1) Kurt Gödel, Russell's mathematical logic (1944), in *Philosophy of mathematics*, selected readings, ed. by Paul Benacerraf and Hilary Putnam, 2nd ed. (Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1983), 447.

et également du degré auquel il prend au sérieux le projet leibnizien, y compris, ce qui est à la fois un peu difficile à comprendre et assez déconcertant, pour ce qui est des vertus heuristiques tout à fait prodigieuses que lui attribuait Leibniz.

Gödel a étudié Leibniz de façon assez systématique dans les années 1943-1946, à un moment où il avait cessé pour l'essentiel de faire des recherches dans la logique proprement dite et où, comme le dit Wang, son travail est devenu plus philosophique que mathématique. On sait aussi que ses papiers contiennent de volumineux cahiers de notes sur Leibniz et sur la littérature qui lui est consacrée. De tous les philosophes, c'est certainement Leibniz qui était à ses yeux le plus grand et qui l'a le plus influencé. Nous savons qu'il l'admirait d'une façon presque inconditionnelle et qui n'est pas simplement celle que l'on porte à un grand ancêtre historique : il considérait, en effet, comme tout à fait possible de remettre aujourd'hui en chantier un grand programme de métaphysique rationaliste aussi ambitieux que l'avait été le sien. D'après Wang, « Gödel semble être d'avis que Leibniz a considéré toutes les choses réellement fondamentales et que ce dont nous avons besoin est de voir ces choses plus clairement (2) ». Cela concorde tout à fait avec la tendance générale de Gödel à considérer que deux ou trois siècles supplémentaires de philosophie ont changé réellement peu de chose à notre compréhension des choses fondamentales en philosophie et que la tâche principale reste aujourd'hui comme hier de chercher à appréhender plus clairement les concepts fondamentaux. Sur un point, il est d'accord avec Newton, puisqu'il pense qu'il devrait être possible de faire pour la métaphysique l'équivalent de ce que Newton a fait pour la physique, à savoir trouver une « théorie axiomatique » correcte pour elle, au moins dans ses grandes lignes. Sur un autre, il est d'accord avec Leibniz et l'est notamment dans la compréhension que Leibniz a de la nature des concepts physiques. Gödel a expliqué, du reste, que, s'il était parvenu à construire un système philosophique, cela aurait été une forme de monadologie. Son attitude, en ce qui concerne la philosophie, pose, comme le remarque Wang, un problème difficile, puisque, tout en proclamant sa confiance dans les vertus de la méthode axiomatique, il est obligé en même temps d'admettre qu'il

(2) Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel* (Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1987), 211.

n'a même pas réussi à déterminer ce que peuvent être les concepts primitifs de la métaphysique et encore moins à trouver les bons axiomes pour eux. Wang résume sa position en disant :

« Gödel semble vouloir continuer à partir de l'endroit où Newton et Leibniz se sont arrêtés et croire que le cours de l'histoire après le XVII[e] siècle a régressé, plutôt que progressé, sauf pour ce qui concerne l'accroissement de l'information (mais non de la compréhension réelle) en mathématiques, dans les sciences de la nature (et dans certains autres domaines). Alors qu'il utilise la physique de Newton comme modèle, sa sympathie philosophique va à Leibniz. Il n'est pas satisfait de la compréhension que Newton a des concepts physiques, mais souhaite continuer la tentative faite par Leibniz pour analyser plus profondément les concepts physiques d'une manière telle que les concepts physiques soient fusionnés avec les concepts réellement primitifs de la métaphysique. De ce fait, en particulier, il n'est pas satisfait des « fondements métaphysiques » kantiens de la physique (newtonienne, plutôt que leibnizienne) (3). »

Le point crucial, bien sûr, est que l'entreprise de Kant consacre, à ses yeux, le divorce regrettable de la physique d'avec la métaphysique. Comme la plupart des représentants de la tradition philosophique autrichienne, Gödel n'est pas particulièrement impressionné par la révolution que Kant est supposé avoir effectuée et par la façon dont elle a déterminé pour une part essentielle l'orientation de la philosophie au cours du XIX[e] siècle. Il pense que ce sont essentiellement les « préjugés de l'époque » qui nous empêchent de reconnaître que l'on pourrait très bien essayer de reprendre les choses à un stade antérieur.

Dans l'admiration que Gödel professait pour Leibniz, il y a quelque chose qui confine par moments plus ou moins à la mythologie et même, semble-t-il, à la mythomanie. Pendant la Seconde Guerre mondiale, il était obsédé par l'idée que certains des manuscrits de Leibniz risquaient d'être détruits, parce qu'on n'avait probablement pas fait le nécessaire pour les mettre à l'abri. Il pensait même apparemment que certains avaient intérêt à ce qu'ils soient détruits. En 1939, Karl Menger lui a demandé qui pourrait bien avoir intérêt à ce que les écrits de Leibniz soient détruits. À quoi il a répondu : « Naturellement, les gens qui ne veulent pas que les hommes deviennent plus intelligents. » Et comme Menger lui avait objecté que Voltaire serait probablement une cible plus plausible, il a rétorqué : « Qui est jamais devenu plus intelligent en lisant les

(3) Wang, *op. cit. in* n. 2, 165.

écrits de Voltaire (4) ? » Gödel semble avoir pensé qu'un bon nombre des idées et des écrits de Leibniz avaient été en réalité déjà bel et bien perdus, un peu comme l'a été la démonstration par Fermat de son théorème, si toutefois il en avait réellement une, ce dont beaucoup de mathématiciens doutent aujourd'hui. Apparemment, Gödel croyait qu'en plus de ce que l'on sait d'eux, les écrits de Leibniz pourraient bien avoir recelé quelque trésor ou quelque secret, peut-être aujourd'hui définitivement perdu, qui aurait rendu possible des progrès spectaculaires dans la découverte mathématique elle-même et la résolution des problèmes mathématiques.

À la fin de son essai sur « La logique mathématique de Russell », il revient au problème de l'analyse des concepts fondamentaux et à Leibniz. En dépit des progrès considérables qui ont été réalisés dans la logique mathématique depuis les *Principia mathematica*,

> « bien des symptômes, écrit-il, ne montrent que trop clairement que [...] les concepts primitifs ont besoin d'être élucidés davantage. Il semble raisonnable de supposer que c'est cette compréhension incomplète des fondements qui est responsable du fait que la logique mathématique est restée jusqu'ici tellement en deçà des attentes élevées de Peano et d'autres qui (d'accord avec les affirmations de Leibniz) avaient espéré qu'elle faciliterait les mathématiques théoriques dans la même mesure que le système décimal des nombres a facilité les calculs numériques. Car comment peut-on espérer résoudre des problèmes mathématiques de façon systématique par la seule analyse des concepts qui y apparaissent, si notre analyse jusqu'à présent ne suffit même pas à établir les axiomes (5) ? »

Gödel pense que la logique mathématique, au deuxième des sens distingués plus haut, devrait être une partie centrale de ce qu'était supposée être la caractéristique leibnizienne. Mais, comme le remarque Wang, il est pour le moins difficile de voir comment la logique mathématique, telle qu'elle est pratiquée aujourd'hui, pourrait être étendue de façon à fournir une méthode puissante (ou même simplement des directives efficaces) pour de nouvelles découvertes mathématiques. Et pourtant, c'est ce que Gödel semble bel et bien croire. Il donne l'impression d'être à peu près aussi optimiste que l'avait été en son temps Leibniz sur les possibilités du nouvel instrument qu'il avait mis au point, tout en admettant par ailleurs que nous ne savons même pas réellement comment nous y prendre pour commencer à le construire. Son idée semble être

(4) Wang, *op. cit. in* n. 2, 103.
(5) Gödel, *op. cit. in* n. 1, 468-469.

qu'une fois que nous sommes arrivés aux bons axiomes, nous pouvons apprendre à appréhender également de façon appropriée les concepts dérivés et approcher les problèmes de façon systématique. Wang avoue qu'il ne voit pas les raisons que Gödel pouvait avoir de croire cela et j'avoue que je ne les vois pas non plus. Comme le note Wang :

« Par exemple, le système standard incomplet de la théorie des nombres est modérément adéquat, pour ce que nous en savons, pour la solution de la plupart des problèmes dans ce domaine, mais ne semble offrir aucune indication pour une quelconque méthode systématique de résolution des problèmes. [Gödel] pense-t-il que c'est parce que les concepts ne sont pas autosuffisants *(self-contained)* compte tenu du fait qu'ils ne sont pas suffisamment fondamentaux (peut-être comme le révèle l'incomplétabilité) (6) ? »

Leibniz souligne qu'en même temps que les sciences se complexifient et s'étendent par le haut (au niveau des superstructures), elles se simplifient et se condensent par le bas (au niveau des éléments et des fondements) :

« On peut même dire, écrit-il, que les sciences s'abrègent en s'augmentant, qui est un paradoxe très véritable, car plus on découvre des vérités et plus on est en estat d'y remarquer une suite réglée et de se faire des propositions tousjours plus universelles dont les autres ne sont que des exemples ou corollaires, de sorte qu'il se pourra faire qu'un grand volume de ceux qui nous ont précédés se réduira avec le temps à deux ou trois thèses générales. Aussi, plus une science est perfectionnée, et moins a-t-elle besoin de gros volumes, car selon que ses Elémens sont suffisamment establis, on y peut tout trouver par le secours de la science générale ou de l'art d'inventer (7). »

Il n'y a, effectivement, aucun doute sur le fait qu'une fois que nous disposons des bons concepts et plus encore des bons axiomes pour eux, un grand nombre de questions qui ne l'étaient pas auparavant deviennent généralement abordables et décidables de façon systématique. Mais, cela étant, on peut se demander ce qui justifie l'optimisme de Gödel, en ce qui concerne le bénéfice que nous pouvons attendre de la recherche des éléments dans la logique elle-même. Si le point crucial est de trouver des notions plus fondamentales ou de nouveaux axiomes pour celles que nous avons déjà, qui nous permettront de décider davantage de questions, il ne donne

(6) Wang, *op. cit. in* n. 2, 311.

(7) Gottfried Wilhelm Leibniz, *Philosophische Schriften*, herausgegeben von C. J. Gerhardt (Hildesheim : Georg Olms, 1965), vol. VII, 180.

guère d'exemples concrets de ce que cela pourrait vouloir dire dans les faits. Un exemple mathématique auquel il accorde une importance particulière est celui de la notion d'« ensemble ». Il se dit convaincu qu'il n'y a pas lieu de renoncer à l'espoir de décider un jour l'hypothèse du continu par l'adjonction de nouveaux axiomes pour la notion d'ensemble. En ce qui concerne certains des axiomes de l'infini nouveaux qui ont été proposés avec l'espoir de réussir à décider par ce moyen l'hypothèse du continu, il remarque :

« On peut démontrer que ces axiomes ont également des conséquences bien au-delà du domaine des nombres transfinis très grands, qui est leur objet immédiat : on peut montrer que chacun d'entre eux, sous la supposition de sa consistance, accroît le nombre des propositions décidables même dans le domaine des équations diophantiennes (8). »

Les axiomes en question peuvent donc manifester leur fécondité dans des domaines divers, qui sont parfois très éloignés de celui dont ils traitent directement. Gödel considère que la théorie des ensembles est confirmée par ses conséquences dans l'arithmétique, en un sens que l'on peut comparer à celui auquel la physique est confirmée par la perception sensorielle. Mais le problème est que, si les axiomes dont il parle se trouvent ainsi légitimés indirectement, ils offrent, en revanche, peu d'espoir de parvenir à une décision concernant l'hypothèse du continu elle-même.

D'après Wang, dans une conversation du 3 mars 1948 avec Carnap, Gödel dit que Leibniz avait apparemment obtenu *(apparently had obtained)* une méthode de décision pour les mathématiques (9). C'est sans doute ce que Leibniz croyait. Mais que peut bien vouloir dire une assertion de cette sorte et en particulier l'expression « avait apparemment obtenu » dans la bouche de quelqu'un comme Gödel ? Elle peut sembler d'autant plus étonnante que, d'après les notes de Carnap, dans une conversation du 23 décembre 1929, qui est par conséquent antérieure à la démonstration de son théorème, Gödel dit, en faisant référence à Brouwer :

« [...] les mathématiques sont inépuisables : on doit toujours puiser à nouveau à la « source de l'intuition ». Il n'y a par conséquent pas de *Characteristica universalis* pour la *totalité* des mathématiques, et pas de procédure de décision pour la totalité des mathématiques (10). »

(8) Kurt Gödel, What is Cantor's continuum problem ?, 1947, *in* Benacerraf and Putnam, *op. cit. in* n. 1, 477.
(9) Wang, *op. cit. in* n. 2, 173.
(10) *Ibid.*, 50.

Cela n'empêche pas forcément, bien entendu, qu'il puisse y avoir une *Characteristica universalis* pour certaines parties des mathématiques et que le programme de Leibniz puisse rester, de ce point de vue et dans ces limites, tout à fait actuel. Gödel était, cela va sans dire, mieux placé que quiconque pour savoir qu'il ne peut pas y avoir dans les mathématiques de procédure de décision générale qui opère à la façon d'une machine, même si Leibniz lui-même pouvait encore croire ce genre de chose et l'a probablement cru.

« Les vérités qui ont encore besoin d'être bien établies sont, dit-il, de deux sortes, les unes ne sont connues que confusément et imparfaitement et les autres ne sont point connues du tout. Pour les premières il faut employer la méthode de la certitude ou l'art de démontrer, les autres ont besoin de l'art d'inventer. Quoyque ces deux arts ne different pas tant qu'on croit, comme il paraîtra dans la suite (11). »

Mais on peut avoir l'impression que l'effet d'une découverte comme celle de Gödel est justement de démontrer qu'ils diffèrent, au contraire, bien plus qu'on ne le croit. L'idéal de la « pureté mécanique », qui est, pour Leibniz lui-même, compte tenu de l'idée qu'il se fait de ce que doit être une démonstration proprement dite, caractéristique de l'art de démontrer, ne semble guère susceptible de s'adapter aussi à l'art d'inventer et *a fortiori* de le favoriser. Comme le dit Wang :

« L'idéal de la formalisation semble aspirer à un type d'homogénéité (comme une forme de « pureté » ) au niveau qui est précisément le plus inférieur de l'intelligence. Il est très éloigné d'une compréhension intuitive de la démonstration et peut avoir quelque chose à voir avec l'aspiration à un sens abstrait de la sécurité qui inclut, par exemple, une protection contre l'oubli, puisqu'il n'y a pas d'étapes qui soient oubliées dans une démonstration purement formelle. Même si l'on met à part l'exigence de complétude, les systèmes formels possèdent également cette qualité de « pureté mécanique », qui, cependant, n'aide pas à la recherche de méthodes plus puissantes pour démontrer des théorèmes (12). »

Il y a certainement, chez Leibniz, une tension constante entre le désir de la sécurité maximale, qu'il trouve, à la différence de Descartes, dans la formalité elle-même, et un autre désir, au moins aussi puissant, qui est celui de l'inventivité maximale.

(11) Leibniz, *op. cit. in* n. 7, 183.
(12) Wang, *op. cit. in* n. 2, 173.

Dans une conversation du 15 mars 1972 avec Wang, Gödel dit :

« En 1678, Leibniz a formulé la revendication de la caractéristique universelle. Pour l'essentiel, elle n'existe pas : toute procédure systématique pour résoudre des problèmes de toutes les espèces doit être non mécanique. »

Et, bien entendu, même une procédure mécanique ne comporte pas la garantie du succès universel, puisqu'il subsiste la question de savoir si la procédure aboutira ou non dans tous les cas à un terme. Gödel est cependant si impressionné par ce que Leibniz dit à propos de la possibilité de traiter un jour tous les problèmes, y compris ceux de la métaphysique, d'une façon que l'on peut qualifier de « mathématique », qu'il écrit dans un article de 1951, « Some basic theorems on the foundations of mathematics and their applications » :

« J'ai l'impression qu'après une clarification suffisante des concepts qui sont en question il sera possible de mener ces discussions avec une rigueur mathématique et que le résultat sera alors que (sous certaines assomptions qui peuvent difficilement être niées [en particulier, l'assomption qu'il existe tout simplement quelque chose comme la connaissance mathématique]) la conception platonicienne est la seule qui soit tenable. Par là j'entends la conception selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensible qui existe indépendamment à la fois des actes et des dispositions de l'esprit humain et est seulement perçue, et probablement perçue de façon très incomplète, par l'esprit humain (13). »

Le fait que Leibniz lui-même ait sur la question du statut des entités mathématiques et des objets abstraits en général une position qui est bien plus proche du nominalisme que du réalisme platonicien, est une chose que Gödel semble ou bien avoir ignorée ou bien avoir décidé de considérer comme tout à fait secondaire.

## 2 / *La question des fondements et le problème de l'invention mathématique*

D'après Wang, la position de Gödel semble être que là où il n'existe pas de méthode de décision mécanique, il pourrait peut-être exister néanmoins une méthode de décision non mécanique, une méthode qui n'est pas complètement spécifique et qui ne décide

(13) Kurt Gödel, *Collected works*, vol. III, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, R. M. Soloway (New York - Oxford : Oxford Univ. Press, 1995), 322-323.

pas formellement les questions, mais donne des indications sur ce que le mathématicien doit faire pour parvenir à les décider. Gödel pense apparemment à une méthode qui permettrait d'arriver à la formulation de nouveaux axiomes, en plus de ceux dont on dispose déjà, ce qui ne peut évidemment pas être fait par une machine, mais donnerait au mathématicien des directives suffisantes sur la façon dont il doit s'y prendre pour résoudre les problèmes. Une note fameuse du mémoire de 1931 explique que la vraie raison de l'indécidabilité inhérente à tous les systèmes formels des mathématiques réside dans le fait que la formation de types logiques toujours plus élevés peut être continuée jusque dans le transfini. Les propositions indécidables à un certain niveau deviennent décidables toutes les fois que des types plus élevés sont ajoutés. La conclusion que Gödel tire des résultats d'indécidabilité n'est donc pas du tout, comme on le croit souvent, une incitation à renoncer, mais plutôt une indication concernant le genre de chose que nous devons faire pour pouvoir espérer parvenir à une décision.

Comme le remarque Wang, l'histoire des mathématiques elle-même offre de nombreux exemples de cas dans lesquels l'invention d'un nouveau système ou d'un nouveau calcul, comme par exemple la géométrie analytique ou le calcul différentiel et intégral, rend beaucoup plus facile et systématique la résolution de toute une classe de problèmes. Dans chacun des cas de cette sorte, des tentatives et des conjectures au hasard semblent être remplacées par un certain type de méthode systématique plus contrôlable. « Leibniz, se demande Wang, pouvait-il chercher une méthode générale de cette sorte qui s'appliquerait à la totalité des mathématiques (14) ? » Leibniz a certainement rêvé d'une méthode de ce genre et même d'une méthode qui permettrait de décider par le simple calcul une multitude de questions qui n'ont à première vue rien de mathématique. Mais ce qui est surprenant est la façon dont Gödel semble avoir pris cette idée au sérieux. À la fin de son article sur « La logique mathématique de Russell », il écrit :

« Il n'y a pas de raison d'abandonner tout espoir. Leibniz, dans ses écrits sur la *Characteristica universalis*, ne parlait pas d'un projet utopique ; si nous devons croire ce qu'il dit, il avait développé son calcul du raisonnement dans une large mesure, mais attendait pour le publier que la semence puisse tomber sur un sol fertile. Il est même allé jusqu'à estimer

(14) Wang, *op. cit. in* n. 2, 174.

le temps qui serait nécessaire pour que son calcul soit développé par un petit nombre de scientifiques choisis jusqu'à un point tel « que l'humanité disposerait d'une nouvelle espèce d'instrument augmentant les pouvoirs de la raison beaucoup plus qu'un instrument optique quelconque n'a jamais aidé le pouvoir de la vision ». Le temps qu'il indique est cinq ans, et il affirme que sa méthode n'est en aucune façon plus difficile à apprendre que les mathématiques ou la philosophie de son époque. De plus, il a dit de façon répétée que, même dans l'état rudimentaire où il avait développé la théorie lui-même, elle était responsable de toutes ses découvertes mathématiques ; chose que, pourrait-on espérer, même Poincaré reconnaîtrait comme une preuve suffisante de sa fécondité (15). »

Aussi surprenant que cela puisse paraître aujourd'hui, l'intérêt de Gödel pour la question des fondements des mathématiques était, comme celui de Hilbert, motivé fortement par la croyance que des progrès fondamentaux dans ce domaine produiraient d'une certaine façon une révolution dans tout le domaine des mathématiques (des mathématiques pures, en tout cas). Cela n'est pas sans rapport avec la façon dont il comprend Leibniz. Dans l'histoire de la logique, Leibniz est l'auteur d'un nombre considérable d'anticipations et d'innovations conceptuelles et techniques qui font de lui le véritable père de la logique moderne et qui ont été maintes fois étudiées. Mais ce n'est pas cela qui est le plus important aux yeux de Gödel. C'est plutôt le fait que Leibniz s'est attaqué au problème des fondements d'une façon qui était susceptible de révolutionner et qui a effectivement révolutionné les mathématiques elles-mêmes. Gödel pensait que les progrès les plus décisifs dans le domaine de la pensée proviennent toujours d'un gain réalisé dans la compréhension des choses les plus simples et les plus fondamentales. Et on peut remarquer que c'est toujours à des questions d'une espèce réellement fondamentale qu'il s'est lui-même attaqué, avec les succès que l'on sait. Or, en ce qui concerne les effets qu'il attendait de cela pour les mathématiques elles-mêmes, on peut constater, comme le fait Wang, que le résultat a été plutôt décevant.

« Le travail de Gödel a eu, écrit-il, peu d'effet sur la pratique de la recherche et la conception des mathématiques de la plupart des mathématiciens. De façon surprenante, l'incidence la plus grande concerne davantage des questions conceptuelles qui ont trait aux ordinateurs et à la mécanisation, qui sont une préoccupation centrale de la technologie du moment (16). »

(15) Gödel, *op. cit. in* n. 1, 469.
(16) Wang, *op. cit. in* n. 2, 168.

Ce n'est évidemment pas tout à fait ce dont rêvait Gödel. Il ne semble pas, en tout cas, s'être intéressé personnellement au développement réel des ordinateurs.

Wang note qu'en ce qui concerne le développement de la logique mathématique, il y a deux idées de Leibniz qui se sont révélées être d'une importance centrale. La première est la caractérisation des vérités de raison comme étant les vérités qui sont vraies dans tous les mondes possibles. C'est, dit-il, une conception qui s'applique aussi bien aux tautologies du calcul propositionnel, telles qu'elles sont comprises et traitées par Ludwig Joseph Wittgenstein dans le *Tractatus*, qu'à la notion plus générale de proposition logiquement valide ou logiquement vraie dans le calcul des prédicats du premier ordre. Il semble y avoir là, en fait, un malentendu historique assez curieux, puisque Leibniz, à ma connaissance, n'a dit nulle part littéralement que les vérités de raison pouvaient être définies comme les vérités qui sont vraies dans tous les mondes possibles. Ce qui se rapproche le plus de cette idée est sans doute les passages dans lesquels il souligne que Dieu aurait pu assurément créer un monde pourvu de lois physiques, mais pas de lois logiques et mathématiques, différentes. On peut dire des vérités nécessaires, qui ont trait uniquement à l'essence et à la possibilité, que « *nec tantum obtinebunt, dum stabit mundus, sed etiam obtinuissent si* DEUS *alia ratione Mundum creasset* (17) ». Je ne sais pas qui a attribué le premier à Leibniz la paternité de la définition de la vérité logique comme étant la vérité dans tous les mondes possibles. Mais c'est un fait remarquable que les créateurs de la sémantique logique ont présenté spontanément leur définition de la validité logique par la vérité dans toute interprétation du système formel ou du calcul comme un équivalent de ce que Leibniz devait entendre par la « vérité dans tous les mondes possibles ».

« Une classe de propositions dans [le langage] $S_1$, qui contient pour toute proposition atomique ou bien cette proposition, ou bien sa négation, et pas d'autres propositions, est, explique Carnap, appelée une *description d'état (state-description)*, parce qu'elle donne évidemment une description complète d'un état possible de l'univers des individus relativement à toutes les propriétés et les relations exprimées par les

(17) Gottfried Wilhelm Leibniz, *Opuscules et fragments inédits*, publ. par L. Couturat (Hildesheim : Georg Olms, 1966), 18.

prédicats du système. De ce fait, les descriptions d'état représentent les mondes possibles de Leibniz ou les états de choses possibles de Wittgenstein (18). »

Cette transposition de la notion leibnizienne de monde possible s'appuie évidemment sur une analogie réelle. Mais il y a également une différence importante qui ne l'est pas moins. Une description d'état carnapienne fixe simplement un comportement donné de tous les individus du monde particulier dans lequel on se situe par rapport à toutes les propriétés et les relations dont il est question dans le système. Un monde possible leibnizien est déterminé, en revanche, par l'existence d'une classe d'individus qu'il ne partage avec aucun autre (un individu n'appartient jamais qu'à un seul et unique monde possible) et qui sont tels qu'il peut être reconstruit en totalité à partir du concept complet de n'importe lequel d'entre eux. « Vrai dans tous les mondes possibles », au sens de Leibniz, ne coïncide donc pas, c'est le moins qu'on puisse dire, avec « vrai dans toutes les descriptions d'état », au sens de Carnap.

L'autre idée importante que les logiciens modernes ont pu trouver chez Leibniz est l'insistance sur les « arguments formels » ou, comme il dit, les *argumenta in forma*, qui sont mécaniquement testables et, selon une expression, que lui-même utilise, « infaillibles ». Parlant de la *Caractéristique universelle,* il écrit :

« Les hommes trouveroient par là un juge des controverses vraiment infaillible. Car ils pourroient tousjours connoistre s'il est possible de décider la question par le moyen des connaissances qui leur sont déjà données, et lorsqu'il n'est pas possible de se satisfaire entièrement, ils pourront toujours déterminer ce qui est le plus vraisemblable. Comme dans l'arithmétique on peut toujours juger s'il est possible ou non de deviner exactement le nombre que quelque personne a dans la pensée, sur ce qu'elle nous en a dit, et souvent on peut dire ; cela doit estre l'un de deux ou de trois, etc., tels nombres, et prescrire des bornes à la vérité inconnue. En tout cas il importe au moins de sçavoir que ce qu'on demande n'est pas trouvable par les moyens que nous avons (19). »

L'exigence de formalité a reçu une attention de plus en plus grande au cours du XIX[e] siècle et elle a conduit finalement à la construction de systèmes formels pour différents domaines majeurs des mathématiques. Mais il a fallu attendre encore un peu plus, en

(18) Rudolf Carnap, *Meaning and necessity : A study in semantics and modal logic*, enlarged ed. (Chicago-London : The Univ. of Chicago Press, 1956), 9, souligné par Carnap.
(19) Leibniz, *op. cit. in* n. 7, 26.

fait jusqu'à la fin des années 1920, pour que la question qu'évoque Leibniz dans la dernière phrase, à savoir celle de la complétude et de la décidabilité, formulée à propos des systèmes formels eux-mêmes, soit posée explicitement et résolue. Ce qui pourrait ressembler ici à une sorte de paradoxe est le fait que ce soit précisément Gödel qui a contribué de la façon la plus décisive à tempérer ce qu'on pourrait appeler l'enthousiasme leibnizien, en démontrant un certain nombre de résultats négatifs essentiels sur les possibilités des systèmes formels. Dans tout cela, bien sûr, une incertitude demeure sur ce qu'il faut entendre ici exactement par la notion de procédure formelle ou mécanique. C'est seulement après la découverte de Gödel que Alan Mathison Turing a réussi à clarifier en 1936 ce que l'on veut dire lorsqu'on parle d'une procédure mécanique ou d'un algorithme. Gödel a toujours considéré ce qu'a fait sur ce point Turing comme une découverte majeure et exemplaire ; et on pourrait être tenté de considérer qu'elle permet d'appréhender avec une précision complète et définitive l'essence de ce que Leibniz entendait par un « argument formel ».

Les historiens de la philosophie, toujours soucieux d'éviter les projections anachroniques, diraient sans doute que ce qui est en question chez Leibniz, lorsqu'il parle de procédures de décision qui opèrent uniquement sur des symboles ou des combinaisons de symboles et qui peuvent être appliquées de façon mécanique et infaillible, n'est pas tout à fait la même chose que ce que l'on entend aujourd'hui par là et pourrait même être sérieusement différent. Et il est probablement vrai qu'il faut résister à la tentation de faire de Leibniz un formaliste ou un mécaniste enthousiaste et naïf, qui n'était simplement pas encore averti de ce que nous savons depuis Gödel. Mais il faut remarquer que Gödel lui-même avait sur l'histoire des concepts une idée qui n'est pas celle des historiens de la philosophie et probablement pas non plus, du reste, la nôtre en général. Il pensait que, dans le cas concerné comme dans beaucoup d'autres, Turing nous a seulement permis d'accéder à une perception plus distincte d'un concept qui pouvait très bien être déjà celui de Leibniz. Ce qui a changé n'est pas pour lui le concept, qui était là depuis le début, mais la perception que nous en avons.

Puisque je suis supposé traiter ici des relations entre la logique et les mathématiques chez Leibniz, je me permettrai de souligner à quel point il aurait trouvé étrange la séparation et même parfois l'incompréhension caractérisée qui semblent s'être instaurées aujourd'hui entre les deux disciplines. Contrairement à ce qu'espérait Gödel, bien des mathématiciens contesteraient sans doute aujourd'hui que le théorème de Gödel ait quoi que ce soit à voir avec les mathématiques proprement dites. Pourtant, lorsque Gödel fut fait docteur *honoris causa* de l'université de Harvard en 1952, il fut présenté comme « le découvreur de la vérité mathématique la plus importante du siècle », une manière de décrire ce qu'il avait fait qu'il apprécia particulièrement. La façon actuelle de concevoir les relations entre les mathématiques et la logique ne correspond évidemment pas beaucoup à l'idée qu'il s'en faisait, mais elle correspond assurément encore moins à celle de Leibniz.

Je ne pense pas ici au fait que Leibniz a été traité souvent comme un des grands précurseurs du logicisme, autrement dit de la doctrine selon laquelle les mathématiques sont simplement une branche de la logique, mais plutôt au fait qu'il considérait manifestement comme futile la volonté de faire passer une ligne de démarcation stricte entre les mathématiques et la logique. Dans les *Nouveaux essais*, Théophile se livre à une apologie si convaincante du syllogisme que Philatèthe lui-même finit par lui dire :

> « Je commence à me faire une tout autre idée de la logique que je n'en avais autrefois. Je la prenais pour un jeu d'écolier, et je vois maintenant qu'il y a comme une mathématique universelle, de la manière que vous l'entendez (20). »

> « Dans toutes les sciences infaillibles, écrit Leibniz, lorsqu'elles sont démontrées exactement, sont pour ainsi dire incorporées des formes logiques supérieures, qui pour une part découlent des formes aristotéliciennes, pour une autre recourent en plus à autre chose (21). »

Il n'en est pas moins vrai que les règles du syllogisme, que Leibniz compare à celles de l'arithmétique des petits nombres, sont les règles élémentaires que l'on doit impérativement connaître avant de passer à des règles d'inférence plus compliquées.

D'Aristote, qui a eu le mérite éminent de soumettre les formes syllogistiques à un petit nombre de lois infaillibles, il dit, d'une façon qui a de quoi surprendre un lecteur habitué à voir les choses à la façon de Descartes et de ses héritiers modernes, qu'il a été, de ce fait, « le premier qui ait écrit mathématiquement en dehors des

(20) Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, chronologie et introd. par Jacques Brunschwig (Paris : Garnier-Flammarion, 1966), 432.
(21) Leibniz, *op. cit. in* n. 7, 519.

*mathématiques* (22) ». Écrire mathématiquement en dehors des mathématiques voulait dire, justement, écrire sur des sujets qui ne sont pas mathématiques et peuvent même être quelconques, sous forme d'*argumenta in forma.*

« Il faut savoir, écrit Leibniz, que par les arguments en forme, je n'entends pas seulement cette manière scolastique d'argumenter dont on se sert dans les collèges, mais tout raisonnement qui conclut par la force de la forme, et où l'on n'a besoin de suppléer aucun article, de sorte qu'un *sorite*, un autre tissu de syllogisme qui évite la répétition, même un compte bien dressé, un calcul d'algèbre, une analyse des infinitésimales me seront à peu près des arguments en forme, parce que leur forme de raisonner a été prédémontrée, en sorte qu'on est sûr de ne s'y point tromper (23). »

Savoir si la réunification doit s'effectuer finalement au profit de la logique ou, au contraire, des mathématiques, c'est-à-dire de ce que Leibniz appelle une mathématique universelle, a une importance qui est évidemment beaucoup plus symbolique que réelle. Historiquement parlant, la raison pour laquelle Leibniz ne peut songer à maintenir une distinction stricte entre les mathématiques et la logique est assez claire. On a tendance à concevoir les mathématiques comme une théorie qui fournit le moyen de calculer sur des nombres et éventuellement des objets d'une autre espèce et la logique comme une théorie qui s'occupe de formuler les règles de la déduction correcte. Mais, pour Leibniz, cette distinction n'est qu'apparente, puisqu'il est probablement le premier à avoir souligné explicitement que toute déduction est un calcul et, inversement, tout calcul, lorsqu'il est réellement mis en forme, se présente comme une déduction, comme le montre la démonstration qu'il donne de $2 + 2 = 4$ dans les *Nouveaux essais*. Wang, qui cite le passage des *Nouveaux essais* dont j'ai parlé sur le syllogisme, note que « les exemples montrent que la conception de Leibniz incluait (ce qu'on appelle aujourd'hui) le traitement de données et les manipulations de symboles non numériques (24) ». C'est tout à fait évident. Mais il faut ajouter que Leibniz montre aussi comment un bon nombre de calculs non numériques, à commencer par celui du syllogisme lui-même, pourraient être transformés assez facilement en calculs numériques. Comme le remarque Wang, Leibniz et Hil-

(22) Leibniz, *op. cit. in* n. 7, 519. Souligné par Leibniz.
(23) Leibniz, *op. cit. in* n. 20, 425.
(24) Wang, *op. cit. in* n. 2, 263.

bert avaient déjà suggéré tous les deux de remplacer les concepts ou les expressions par des nombres. Et on se demande parfois si Gödel s'est inspiré aussi de Leibniz pour l'invention de sa technique de numérotation des symboles et des expressions. Je ne connais pas vraiment la réponse. Mais ce qui est clair est que ce qui est réellement nouveau chez Gödel n'est pas l'idée de remplacer les concepts ou les expressions par des nombres, mais le fait d'avoir développé systématiquement cette idée et surtout de l'avoir appliquée à la représentation de concepts et de relations syntaxiques cruciaux comme par exemple la notion de démontrabilité elle-même, autrement dit d'avoir conçu l'idée d'une arithmétisation possible de la syntaxe.

## 3 / *Le programme leibnizien et la question des « limitations internes » des formalismes*

Peu avant la fin de son article sur « La logique mathématique de Russell », Gödel se réfère à nouveau implicitement à Leibniz, lorsqu'il essaie de répondre à la question de savoir si les axiomes des *Principia mathematica* peuvent être considérés comme analytiques. On pourrait, d'après lui, distinguer deux sens du mot « analytique ».

« En premier lieu, écrit-il, il peut avoir le sens purement formel selon lequel les termes qui apparaissent peuvent être définis (soit explicitement, soit par des règles qui permettent de les éliminer des phrases qui les contiennent) d'une manière telle que les axiomes et les théorèmes deviennent des cas spéciaux de la loi d'identité et les propositions réfutables deviennent des négations de cette loi. En ce sens, on peut démontrer que même la théorie des entiers n'est pas analytique, pour peu que l'on exige des règles d'élimination qu'elles permettent d'effectuer réellement l'élimination en un nombre fini d'étapes dans chaque cas (25). »

La raison de cela est que, comme on le sait depuis Turing, si ce genre de chose était possible, cela impliquerait l'existence d'une procédure de décision pour les propositions arithmétiques. Si l'on admet des réductions infinies, avec des propositions intermédiaires de longueur infinie (ce qui correspond à la façon dont Leibniz se représente la démonstration des propositions contingentes), alors

(25) Gödel, *op. cit. in* n. 1, 467.

on peut montrer que tous les axiomes des *Principia* sont analytiques pour certaines interprétations, mais la démonstration exige, remarque Gödel « la totalité des mathématiques telle qu'elle est appliquée à des phrases de longueur infinie [...], par exemple, on peut démontrer que l'axiome du choix est analytique, mais uniquement si on l'assume comme vrai (26) ».

Ce concept de l'analyticité au premier sens est clairement inspiré de l'idée leibnizienne que le propre des vérités logiques et mathématiques et des vérités de raison en général est d'être réductibles à des identités explicites par une suite finie d'opérations consistant à substituer l'un à l'autre la définition et le défini dans une proposition. En même temps, il pourrait sembler que ce que dit Gödel illustre avant tout le caractère dramatiquement insuffisant des moyens qui, selon Leibniz, devraient suffire à la démonstration de toutes les vérités nécessaires. Mais il y a, heureusement, un deuxième sens, plus large, du mot « analytique », et dont on peut se demander s'il n'est pas au fond, lui aussi, leibnizien et même peut-être plus proprement leibnizien. C'est le sens auquel une proposition est dite « analytique », si elle est vraie « en vertu de la signification des concepts qui y figurent », cette signification pouvant être elle-même indéfinissable (c'est-à-dire, irréductible à quoi que ce soit de plus fondamental). Gödel accepte l'idée que les propositions mathématiques, y compris celles de la théorie des ensembles, sont analytiques, si cela veut dire qu'elles sont vraies en vertu de la signification des concepts qu'elles contiennent, mais évidemment pas si cela veut dire qu'elles sont vraies en vertu de règles ou de conventions concernant la signification des symboles. Il note que

> « cette conception concernant l'analyticité rend à nouveau possible pour toute proposition mathématique l'éventualité d'être peut-être réduite à un cas spécial de $a = a$, à savoir si la réduction est effectuée non pas en vertu des définitions des termes qui apparaissent, mais de leur signification, qui ne peut jamais être exprimée dans un ensemble de règles formelles (27) ».

Cela semble à première vue peu leibnizien, puisque Leibniz exige de toutes les propositions mathématiques (vraies), y compris les axiomes de l'espèce usuelle, qu'elles soient réductibles à des

(26) Gödel, *op. cit. in* n. 1, 467.
(27) *Ibid.*, 468, n. 33.

identités explicites et le soient par l'intermédiaire de définitions. Mais, bien entendu, il ne suggère pas que nous disposons d'ores et déjà pour tous les cas des bonnes définitions, celles qui nous permettraient d'effectuer réellement la réduction, et il n'exclut pas non plus forcément que nous puissions être obligés d'ajouter indéfiniment de nouvelles définitions sans réussir à épuiser par là la signification des termes concernés. Une définition, une fois qu'elle a été obtenue, peut être utilisée, dans le processus de réduction, comme une règle formelle et c'est de cette façon qu'elle doit l'être. Mais rien n'est dit par là sur la façon dont nous pouvons parvenir, en raisonnant cette fois à partir de la signification, aux bonnes définitions et pas non plus sur la possibilité que la signification ne puisse jamais, dans certains cas, être épuisée par une liste quelconque de règles formelles.

Dans un texte de 1972, « Some remarks on the undecidability results », Gödel propose ce qu'il appelle « une autre version du premier théorème d'indécidabilité », qui prend la forme suivante :

« La situation peut être caractérisée par le théorème suivant : pour résoudre tous les problèmes du type Goldbach d'un certain degré de complexité $k$, on a besoin d'un système d'axiomes dont le degré de complication, à une correction mineure près, est $\geq k$ (le degré de complication étant ici mesuré par le nombre de symboles nécessaire pour formuler le problème (ou le système d'axiomes), en y incluant, bien entendu, les symboles qui figurent dans les définitions des termes non primitifs utilisés). Or toutes les mathématiques d'aujourd'hui peuvent être dérivées d'une poignée d'axiomes simples portant sur un très petit nombre de termes primitifs. Par conséquent, même si ne doivent être résolubles que les problèmes qui peuvent être formulés en un petit nombre de pages, le petit nombre d'axiomes simples que nous utilisons aujourd'hui devra être complété par un grand nombre d'axiomes nouveaux ou par des axiomes d'une grande complication. On peut douter que des axiomes évidents en aussi grands nombres (ou d'une complication aussi grande) puissent tout simplement exister, et par conséquent le théorème mentionné pourrait être pris comme une indication de l'existence de questions mathématiques du type oui ou non qui sont indécidables pour l'esprit humain. Mais ce qui parle contre cette interprétation est le fait qu'il *existe* des séries inexplorées d'axiomes qui sont analytiques en ce sens qu'ils ne font qu'expliciter le contenu des concepts qui y figurent, par exemple les axiomes de l'infini dans la théorie des ensembles, qui assertent l'existence d'ensembles de cardinalité de plus en plus grande ou de types transfinis de plus en plus élevés et qui ne font qu'expliciter le contenu du concept général d'ensemble. Ces principes montrent qu'un nombre toujours plus grand d'axiomes (et d'axiomes toujours plus compliqués) apparaît au cours de l'évolution des mathématiques. Car, ne serait-ce que pour comprendre les axiomes de l'infini, on doit d'abord avoir développé dans une mesure considérable la théorie des ensembles (28). »

Un équivalent de cela, dans la conception que Leibniz a de la situation, serait peut-être le suivant. Supposons que, comme nous devrions en théorie le faire d'après lui, nous n'acceptions comme axiomes, au sens strict, que des propositions qui ont la forme d'identités explicites, partielles ou totales. Dans ce cas, toute la créativité et la capacité de décision du système se reportent sur les définitions elles-mêmes. Et nous pouvons être amenés, bien entendu, à adopter un nombre de plus en plus grand de définitions et de définitions de plus en plus compliquées pour les termes utilisés. Une fois adoptées, ces définitions viendront s'ajouter, dans les déductions, comme des vérités primitives supplémentaires aux axiomes du système. Mais il est essentiel de remarquer que, pour Leibniz, même si elle est utilisée du point de vue formel comme une convention d'abréviation, une définition comporte toujours initialement une assertion implicite de possibilité. Gödel dit que les axiomes mathématiques, même s'ils sont analytiques, doivent avoir un contenu réel, parce que

« l'existence même du concept de, par exemple, « classe » constitue déjà un axiome de cette sorte ; puisque, si on définissait, par exemple, « classe » et « $\varepsilon$ » comme étant « les concepts qui satisfont les axiomes », on serait incapable de démontrer leur existence (29) ».

On peut faire une constatation du même genre à propos des définitions leibniziennes, puisque ce qui correspond pour les concepts à l'existence pour les individus, à savoir la possibilité (ou, comme dit aussi Leibniz, la vérité) du terme considéré, y est impliqué.

Sur la question de la vérité des axiomes, Gödel dit en fait deux choses à première vue très différentes, dont on peut se demander si elles n'ont pas aussi un équivalent chez Leibniz.

« Il peut, écrit-il, y avoir des axiomes qui abondent à un point tel dans leurs conséquences vérifiables, qui jettent tellement de lumière sur un domaine entier et qui fournissent des méthodes tellement puissantes pour résoudre les problèmes (et même pour les résoudre de façon constructive, pour autant que c'est possible) que, quoi qu'il en soit de la question de

(28) Gödel, *op. cit. in* n. 13, 306. Souligné par Gödel. Voir également What is Cantor's continuum problem ?, *in* Benacerraf and Putnam, *op. cit. in* n. 1, 476-477.

(29) Gödel, *op. cit. in* n. 1, 468, n. 33.

savoir s'ils sont ou non intrinsèquement nécessaires, ils devraient être acceptés au moins dans le même sens que n'importe quelle théorie physique bien établie (30). »

Autrement dit, Gödel reconnaît volontiers, à côté de l'intuition mathématique, l'existence et l'importance d'un autre critère, que l'on peut qualifier de « pragmatique », pour la vérité des axiomes. La même dualité se retrouve certainement de façon typique chez Leibniz, avec d'un côté l'idée que tous les axiomes devraient en principe pouvoir être réduits par l'analyse des concepts à des identités explicites, qui constituent les seules propositions qui soient absolument certaines et évidentes, et de l'autre le pragmatisme en ce qui concerne la question de l'acceptabilité des axiomes dans la pratique réelle du mathématicien. Une bonne partie des axiomes qu'utilisent les mathématiciens appartiennent, pour Leibniz, à une catégorie intermédiaire, ce ne sont pas des identités explicites, ils n'ont pas de nécessité intrinsèque qui puisse être aperçue clairement ou rendue manifeste par la seule analyse des concepts qu'ils impliquent et ils ne sont justifiés, pour l'essentiel, que de la deuxième des façons que distingue Gödel. Leibniz est, pourrait-on dire, un praticien beaucoup trop remarquable en mathématiques pour trouver cette situation anormale ou inquiétante. Mais il y a un point sur lequel il est certainement beaucoup plus optimiste que nous ne pouvons nous permettre de l'être aujourd'hui. Il pense que tous les axiomes authentiques possèdent par essence ce que Gödel appelle une nécessité intrinsèque et que nous devrions pouvoir en principe la découvrir. Que nous ne l'ayons pas fait jusqu'ici pour certains d'entre eux, sur la vérité desquels il n'y a en pratique aucun doute raisonnable, ne menace, bien entendu, en aucune façon la solidité de l'édifice mathématique. Mais il n'en est pas moins vrai que nous ne devons pas renoncer à essayer et pouvons même *a priori* être certains que c'est possible, sans quoi on ne saurait tout simplement pas ce qu'on veut dire quand on dit des axiomes en question qu'ils sont vrais.

J'ai évoqué plus haut la tentation que l'on pourrait avoir et que l'on a parfois de considérer Leibniz comme un formaliste et un mécaniste naïf, qui, d'une part, fait preuve d'un optimisme tout à fait excessif (de notre point de vue) à propos de ce que l'on peut espérer dans ce domaine et, d'autre part, ne semble pas suffisam-

(30) Gödel, *op. cit. in* n. 8, 477.

ment attentif au risque de trivialisation complète que semble comporter la perspective d'une formalisation complète des mathématiques. Du point de vue historique, il est curieux de constater que, si la complétude syntaxique de l'arithmétique formelle (l'existence, pour toute proposition, d'une démonstration ou bien de la proposition elle-même, ou bien de sa négation, dans le système formel concerné) était attendue par beaucoup de gens, la décidabilité, en revanche, ne l'était pas, en dépit du fait qu'elle en constitue bel et bien une conséquence logique (la complétude sémantique, en revanche, n'implique évidemment pas la décidabilité). De toute évidence, la décidabilité était considérée souvent à l'époque comme une propriété plus forte que la complétude (Wang voit là un bon exemple du fait que les croyances ne sont pas fermées par rapport à la relation de conséquence logique). Il a fallu attendre l'article fameux de Turing auquel j'ai fait allusion plus haut pour que l'on prenne conscience du fait qu'un système formel complet est également décidable, puisque, si *p* ou sa négation sont démontrables dans le système, une énumération de toutes les suites de formules qui constituent des candidats possibles au statut de démonstration de *p* ou de non-*p* doit nécessairement se terminer à un moment donné par l'indication d'une suite de l'une ou de l'autre espèce qui fournit la réponse à la question posée. Comme l'ont fait remarquer après coup les historiens de la logique, il est probable que, si on avait su cela dès le début, on aurait été beaucoup moins enclin à espérer et un peu plus à redouter la complétude, puisque son existence, si elle avait été réelle, aurait impliqué celle d'une procédure mécanique qui garantit la possibilité, au moins en principe (autrement dit, à condition d'être prêt à attendre suffisamment longtemps), d'obtenir, même pour une proposition apparemment aussi « résistante » que, par exemple, le théorème de Fermat, une démonstration de la proposition ou de sa négation.

Leibniz était certainement convaincu d'avoir conçu un système dans lequel il existe, pour toute proposition nécessaire, une démonstration ou une réfutation de la proposition, dans un sens qui correspond déjà à la conception « formelle-computationnelle » que nous nous faisons aujourd'hui de la nature de la démonstration. Mais il ne semble pas avoir jamais perçu ce que nous appellerions la complétude (syntaxique) de son système comme une chose qui pourrait menacer en quoi que ce soit la liberté et la créativité des mathématiques. Cela n'a rien de surprenant, si l'on considère l'idée que l'on se faisait encore le plus souvent, à la fin des années 1920, des relations qui existent entre la complétude et la décidabilité. Et surtout, même s'il pouvait exister un système formel complet pour les mathématiques dans leur ensemble, on peut penser qu'il y aurait, de toute façon, encore une différence essentielle à faire entre savoir *a priori* que le système contient nécessairement une démonstration ou une réfutation de la proposition et être capable de trouver effectivement l'une ou l'autre. Leibniz semble tout à fait étranger à la crainte que suscite encore souvent le spectre de la formalisation complète et de la mécanisation, et il ne pense pas du tout que les droits et les privilèges de l'imagination mathématique aient réellement quelque chose à craindre de lui. La découverte d'une procédure de décision « mécanique » ou, en tout cas, mécanisable pour les mathématiques lui semble constituer avant tout une des conquêtes les plus précieuses dont puisse rêver l'esprit humain, et non le genre de dépossession ou d'humiliation dramatiques (Freud dirait probablement de « blessure narcissique ») auquel on a tendance à l'identifier, lorsqu'on pense que le rôle de l'esprit deviendrait, du même coup, secondaire et même négligeable. Et il ne semble même pas gêné par la perspective de l'existence d'une procédure du même genre qui pourrait être appliquée non plus seulement à l'art de démontrer, mais également à l'art d'inventer lui-même.

Ce n'est pas seulement, me semble-t-il, parce qu'il ignore encore des choses essentielles que nous avons apprises depuis, en particulier grâce à Gödel. C'est aussi parce qu'il a une appréciation plus saine que beaucoup de nos contemporains de ce qu'est la situation réelle (j'entends par là des risques, des gains et des pertes réels qu'implique, de façon générale, la mécanisation des tâches intellectuelles). Whitehead dit, dans une déclaration célèbre :

> « C'est un truisme profondément erroné, répété par tous les cahiers d'écriture et par des gens éminents quand ils font des discours, que nous devrions cultiver l'habitude de penser à ce que nous sommes en train de faire. C'est exactement le contraire de cela qui est vrai. La civilisation avance en étendant le nombre des opérations importantes que nous pouvons effectuer sans y penser. Les opérations de la pensée sont comme les charges de cavalerie dans une bataille – elles sont strictement limitées en nombre, elles exigent des chevaux frais et doivent être faites uniquement à des moments décisifs (31). »

(31) Alfred North Whitehead, *An introduction to mathematics* (London - New York - Toronto : Oxford Univ. Press, 1911), 61.

C'est un point de vue que Leibniz partageait déjà largement, aussi bien pour les mathématiques que pour tout le reste. La peur de voir les opérations de pensée « authentiques » se trouver ainsi réduites à la portion congrue lui semblait manifestement une réaction plus émotionnelle que rationnelle. Et il avait, en outre, l'avantage d'être, pour sa part, également à l'aise et également incomparable dans deux tâches entre lesquelles il ne percevait aucune incompatibilité réelle et que personne aujourd'hui, pour des raisons que l'on comprend aisément, ne semble plus capable de mener de front : celle de la reconstruction et de la systématisation logiques et celle de la création mathématique proprement dite.